



گزینه ۱

۱

$$\log_v a = t \Rightarrow \log_a v = \frac{1}{t}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{17}{4} \Rightarrow t^2 - \frac{17}{4}t + 1 = 0 \Rightarrow 4t^2 - 17t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow \log_v a = 4 \Rightarrow a = 16 \xrightarrow{\text{گنگ } a} \text{ غ ق ق} \\ t = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_v a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = v^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a = \sqrt[4]{v} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_a 9} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\sqrt[4]{v}} 9} = 9^{\log_{\sqrt[4]{v}} \frac{1}{4}} = 9^{\log_v \frac{1}{4} \cdot 4} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$$

$$= 9^{-\frac{1}{4} \log_v 2} = 9^{-\frac{1}{4} \cdot 2} = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۴

۲

نکته: در نمودار توابع نمایی به فرم $y = ka^x + b$ ، خط افقی که نمودار تابع به آن نزدیک می‌شود (در $+\infty$ یا $-\infty$)، $y = b$ است.

بنابراین در تابع $y = 2^{x+b} - a$ داریم:

$$\Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = 2^{x+b} - (-1) = 2^{x+b} + 1$$

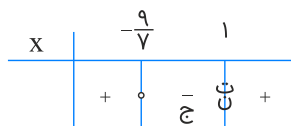
از طرفی باتوجه به شکل نقطه $(0, a+3)$ یعنی $(0, 2)$ در ضابطه تابع صادق است، بنابراین:

$$2 = 2^{0+b} + 1 \Rightarrow 2^b = 1 \Rightarrow b = 0$$

پس $a + b = -1$ است.

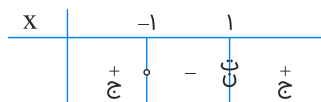
$$\log_{\frac{1}{\Delta}} \frac{x+1}{x-1} > 3 \log_{\frac{1}{\Delta}} \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \log_{\frac{1}{\Delta}} \frac{x+1}{x-1} > \log_{\frac{1}{\Delta}} \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} < \frac{1}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{\Delta} < 0 \Rightarrow \frac{\Delta x + \Delta - x + 1}{\Delta(x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{\Delta x + 9}{\Delta(x-1)} < 0$$



$$\Rightarrow -\frac{9}{\Delta} < x < 1 \quad (1)$$

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$



$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -\frac{9}{\Delta} < x < -1 \Rightarrow x \in \left(-\frac{9}{\Delta}, -1\right)$$

$$(2\sqrt{2})^x \times 2^y = 256 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} \times 2^{2y} = 2^8 \Rightarrow \frac{x}{2} + 2y = 8 \quad (1)$$

$$\log(x-2) + \frac{1}{2} \log 9 = \log(8+y) \Rightarrow 2(x-2) = 8+y$$

$$\Rightarrow y = 2x - 11 \xrightarrow{(1)} \frac{x}{2} + 2(2x - 11) = 8$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + 4x = 8 + 22 \Rightarrow \frac{9x}{2} = 30 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{400}{9}$$

نمودار تابع از نقطه $(-1, 2)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در تابع صدق می‌کند:

$$f(x) = -m\left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{(-1, 2)} 2 = -m\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow 2 = -m(2) \Rightarrow m = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

کافی است معادله $f(x) = g(x)$ را حل کنیم. برای یکسان کردن پایه‌های توابع f و g ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$g(x) = (9 + 4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}(x-1)} = ((\sqrt{5} + 2)^3)^{\frac{1}{3}(x-1)} = (\sqrt{5} + 2)^{x-1}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^{x-1} = ((\sqrt{5} - 2)^{-1})^{x-1} = (\sqrt{5} - 2)^{-x+1}$$

پس داریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{3x^2 - 3x + 4} = (\sqrt{5} - 2)^{-x+1}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3x + 4 = -x + 1 \Rightarrow 3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$$

واضح است که معادله حاصل، جواب ندارد و لذا دو تابع f و g ، غیرمقاطع‌اند.

$$(2^x)^2 + 3^x \times 2^x - 10 \times \frac{9^x}{9} = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 3^x \times 2^x - \frac{10}{9}(3^x)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = a > 0 \\ 3^x = b > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + ab - \frac{10}{9}b^2 = 0 \Rightarrow (a + \frac{5}{3}b)(a - \frac{2}{3}b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3}b \\ a = \frac{2}{3}b \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{2}{3} \times 3^x \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{معادله یک جواب دارد}$$

انرژی آزادشده در زلزله‌ای به بزرگی M در واحد ریشتر برابر E در واحد ارگ از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

اگر E_1 انرژی آزادشده در یک زلزله M_1 ریشتری و E_2 انرژی آزادشده در یک زلزله M_2 ریشتری باشند، خواسته مسئله پیدا کردن نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} \log E_2 = 11/8 + 1/5 M_2 \\ \log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1 \end{cases}$$

چون معادلات به‌دست‌آمده به‌صورت لگاریتمی هستند، پس برای پیدا کردن $\frac{E_2}{E_1}$ از تفاضل دو معادله بالا استفاده می‌کنیم که بتوانیم با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم به نسبت خواسته‌شده برسیم:

$$\log E_2 - \log E_1 = 1/5 M_2 - 1/5 M_1 \Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1/5 (M_2 - M_1)$$

بنابراین نسبت انرژی آزادشده در دو زلزله به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5(M_2 - M_1)}$$

در این سؤال $M_1 = 5$ و $M_2 = 7$ است:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5(7-5)} = 10^{2/5} = 1000$$

دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس:

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{b-a} = 9 = 3^2 \Rightarrow b - a = 2 \quad (I)$$

ازطرف‌دیگر $f(2) = \frac{1}{3}$ ، پس:

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a + b = -1 \quad (II)$$

باتوجه به تساوی‌های (I) و (II) نتیجه می‌شود که $a = -1$ و $b = 1$ است، پس $f(x) = 3^{-x+1}$. اکنون فرض می‌کنیم $f^{-1}(27) = m$ در این صورت:

$$f(m) = 27 \Rightarrow 3^{-m+1} = 27 \Rightarrow -m + 1 = 3 \Rightarrow m = -2$$

$$a^2 - 4a > 0 \xrightarrow{+4} a^2 - 4a + 4 > 4 \Rightarrow (a-2)^2 > 4 \Rightarrow |a-2| > 2$$

$$a^2 - 4a \neq 1 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 \neq 5 \Rightarrow (a-2)^2 \neq 5 \Rightarrow |a-2| \neq \sqrt{5}$$

$$x + b = 0 \xrightarrow{x=-2} -2 + b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + \log_3(1+2) = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 + \log_3(x+2)$$

$$\Rightarrow f(7) = -1 + \log_3 9 = 1$$

$$2^x = t \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \underbrace{2^x}_{\substack{\downarrow \\ \text{مثبت}}} = \underbrace{-1}_{\substack{\downarrow \\ \text{منفی}}} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

تابع موردنظر یک انتقال یک واحدی به سمت چپ تابع لگاریتمی است، پس:

$$x + b = 0 \xrightarrow{x=-1} b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

ازطرفی تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است.

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = a + \log_2(0+1) = 0 \Rightarrow a = 0$$

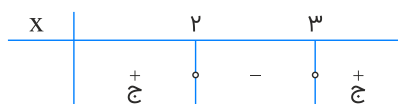
پس تابع موردنظر $f(x) = \log_2(x+1)$ است.

$$c = f(3) = \log_2(3+1) = \log_2 4 = 2$$

$$\left(\frac{1}{\lambda^x} - 4\right) \underbrace{(2^{-x} + 1)}_{\substack{\downarrow \\ \text{مثبت}}} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^x} - 4 \geq 0 \Rightarrow 2^{-3x} \geq 4 \Rightarrow 2^{-3x} \geq 2^2$$

$$\Rightarrow -3x \geq 2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$



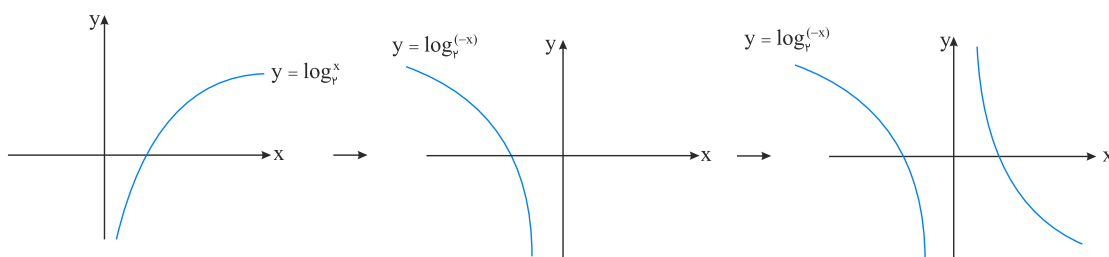
$$\Rightarrow x < 2 \text{ یا } x > 3 \quad (1)$$

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \quad (2)$$

$$1 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} (-\infty, 1) - \{0\}$$

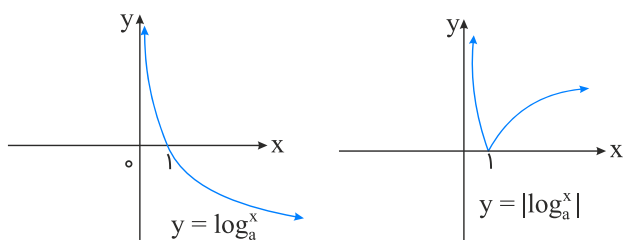
کافیست نمودار تابع $\log_{\frac{1}{p}}(x)$ و $\log_p(-x)$ را بکشیم. داریم:



مطابق شکل دو نمودار یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند.

$$\log 2 = x, \log 3 = y$$

$$\log_{96} 18 = \frac{\log 18}{\log 96} = \frac{\log 2 \times 3^2}{\log 2^5 \times 3} = \frac{2 \log 3 + \log 2}{5 \log 2 + \log 3} \xrightarrow[\log 3 = y]{\log 2 = x} \frac{2y + x}{5x + y}$$



$$\sqrt{3^x + 72\sqrt{3}} = 3^{\frac{9}{2}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 3^x + 72\sqrt{3} = 3^9 \Rightarrow 3^x + 72\sqrt{3} = 3^9 \times 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^x + 72\sqrt{3} = 81\sqrt{3} \\ \Rightarrow 3^x = 9\sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}[x] = -9 \Rightarrow [x] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-9} = 3^9 = 81 \Rightarrow 81 \leq x < 82$$

$$\Rightarrow \log_3 81 \leq \log_3 x < \log_3 82$$

$$\Rightarrow 4 \leq \log_3 x < \log_3 82 < 5 \Rightarrow [\log_3 x] = 4$$

گزینه "۱":

$$\frac{1}{\sqrt{p}+1} = \sqrt{p}-1 \Rightarrow \sqrt{p}^{\frac{1}{\sqrt{p}+1}} = \sqrt{p}^{\sqrt{p}-1}$$

گزینه "۳":

$$(\sqrt{p}-1)^x > (\sqrt{p}-1)^{x^p} \xrightarrow{0 < \sqrt{p}-1 < 1} x < x^p \\ \Rightarrow x^p - x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1$$

گزینه "۳": مثال نقض $x = 2$ دارد.

شرط آنکه a, b, c جملات متوالی دنباله حسابی باشند آن است که $2b = a + c$ ، پس:

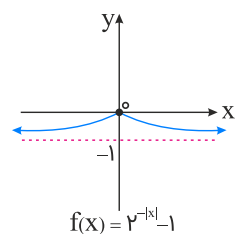
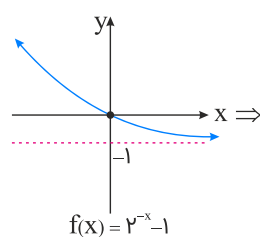
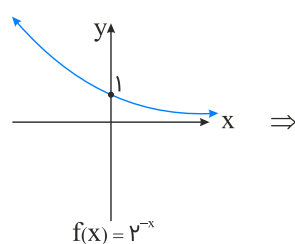
$$2\log_2 x = 2 + \log_2(x + 3) \Rightarrow \log_2 x^2 - \log_2(x + 3) = 2$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{x^2}{x+3}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{x+3} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غقق} \\ x = 6 & \text{قق} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_0 \times 2^{-\frac{t}{T_0}} \Rightarrow \omega/\omega_0 = 2^{-\frac{t}{T_0}} \Rightarrow \log \omega/\omega_0 = \log 2^{-\frac{t}{T_0}} \Rightarrow -1 = -\frac{t}{T_0} \log 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{T_0}{\log 2} \Rightarrow t = \frac{40}{0.3} \simeq 133$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = 6 \times 1 = 6 \\ \log_{\sqrt[5]{2}} \sqrt[5]{2} = \log_{2^{\frac{1}{5}}} 2^{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} \log_2 2 = 1 \times 1 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 6 - 1 = 5/5$$